FORMULARIO — SUMATORIA

I. Definición

Sean a_k una sucesión, y $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $p \leq q$. Entonces,

$$\sum_{k=p}^{q} a_k = a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \ldots + a_q$$

II. Propiedades

P1) Sumatoria de una suma (resta), es la suma (resta) de las sumatorias

$$\sum_{k=p}^{q} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=p}^{q} a_k \pm \sum_{k=p}^{q} b_k$$

P2) Sumatoria de un producto (cuociente), NO es el producto (cuociente) de las sumatorias

$$\text{i)} \quad \sum_{k=p}^{q} (a_k \cdot b_k) \neq \sum_{k=p}^{q} a_k \cdot \sum_{k=p}^{q} b_k \qquad \longleftarrow \text{ ojo!!}$$

$$\text{ii)} \quad \sum_{k=p}^{q} \left(\frac{a_k}{b_k} \right) \neq \frac{\displaystyle\sum_{k=p}^{q} a_k}{\displaystyle\sum_{k=p}^{q} b_k} \qquad \longleftarrow \text{ ojo!!}$$

P3) Sumatoria de una constante por una sucesión, es la constante por la sumatoria de la sucesión

$$\sum_{k=p}^{q} \alpha \cdot a_k = \alpha \cdot \sum_{k=p}^{q} a_k \longleftarrow \alpha \text{ es una constante. Es decir, No tiene variable } k\text{!!}$$

III. Teoremas

T1) Del cambio escala

$$\sum_{k=p>1}^{q} A_k = \sum_{k=1}^{q} A_k - \sum_{k=1}^{p-1} A_k$$

T2) Del reloj

$$\sum_{k=p}^{q} B_k = \sum_{k=p \pm c}^{q \pm c} B_{(k \mp c)}$$

IV. Fórmulas

F1) De la Constante.

$$\sum_{k=p}^{q} c = \underbrace{c+c+c+\ldots+c}_{(q-p+1)\text{ veces}} = c\cdot(q-p+1)$$

F2) De la Geométrica.

$$\sum_{k=p}^{q} c^k = c^p + c^{p+1} + c^{p+2} + \ldots + c^q = \frac{c^p\cdot(1-c^{q-p+1})}{1-c}$$

F3) De las Potencias.

i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\ldots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$

ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

F4) Telescópica.

i) $\displaystyle\sum_{k=p}^{q}[\,T_{k+1}-T_k\,] = (T_{p+1}-T_p)+(T_{p+2}-T_{p+1})+(T_{p+3}-T_{p+2})+\ldots+(T_{q+1}-T_q) = T_{q+1}-T_p$

ii) $\displaystyle\sum_{k=p}^{q}[\,T_k-T_{k+1}\,] = (T_p-T_{p+1})+(T_{p+1}-T_{p+2})+(T_{p+2}-T_{p+3})+\ldots+(T_q-T_{q+1}) = T_p-T_{q+1}$